



Universidade do Minho
Escola de Ciências

Ciência

MATEMÁTICA E MÚSICA

Quer fazer perguntas a um cientista?

Esta rubrica sobre a Escola de Ciências da Universidade do Minho tem também como objectivo criar uma relação entre leitores e investigadores. Alguma vez pensou em fazer uma pergunta a um cientista? Caso queira participar pode enviar todas as suas questões para sec@ecum.uminho.pt e verá as suas dúvidas esclarecidas.

CIÊNCIA | IRENE BRITO*

A matemática e a música são duas das ciências mais antigas. Estão associadas e desde há séculos que são discutidas e analisadas as suas relações.

Sabemos que o ritmo musical se baseia na aritmética; a harmonia, em intervalos numéricos e que no desenvolvimento de temas musicais se encontra simetria e geometria.

Muitos compositores aplicaram conscientemente estruturas matemáticas às suas composições. Johann Sebastian Bach, por exemplo, utilizou simetrias nas “Variações de Goldberg” para obter as variações a partir do tema. Olivier Messiaen recorreu a números primos para gerar desassossego e intemporalidade no “Quarteto para o Fim dos Tempos”. O sistema de doze tons na música dodecafónica de Arnold Schönberg, que influenciou muitos compositores do século XX como Anton Webern, Alban Berg e Igor Stravinsky, baseia-se numa estrutura matemática em que são aplicadas técnicas da teoria de grupos. Sucessões matemáticas, como a famosa sucessão de Fibonacci (1,1,2,3,5,8,...), que descreve o crescimento de uma população de coelhos, serviram de inspiração para Béla Bartók e Claude Debussy criarem as suas composições. John Cage, Iannis Xenákis, Karlheinz Stockhausen e Pierre Boulez e até Wolfgang Amadeus Mozart (no “Jogo de dados musical”) recorreram a padrões aleatórios e a métodos estocásticos para desenvolver a chamada música estocástica (ou música aleatória).

Pitágoras, música e aritmética

A música tem uma das suas origens na geometria e matemática pitagóricas. O filósofo e matemático Pitágoras, que nasceu no ano 570 a.C., foi um dos primeiros a dedicar-se ao estudo da relação entre a matemática e a música. Na teoria da música pitagórica o conjunto de quatro números {6,8,9,12}, também conhecido por “tetraktys”, era a chave para a percepção da harmonia no mundo e a base da harmonia dos tons. Os pitagóricos fizeram experiências com o monocórdio - um instrumento

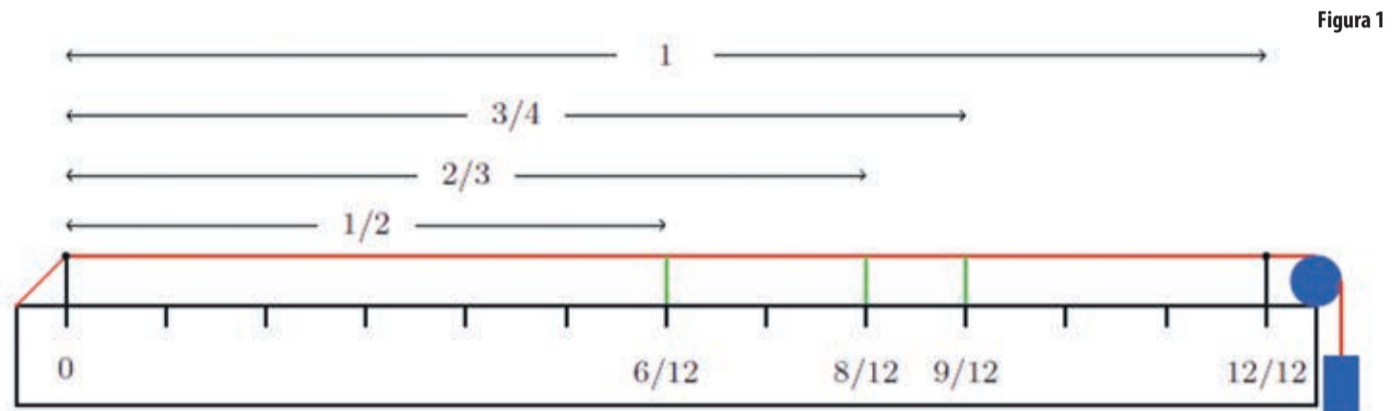


Figura 1

Figura 2

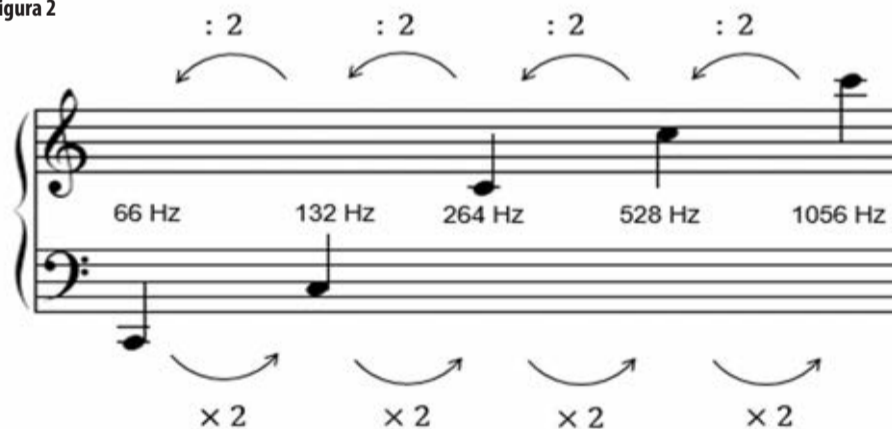


Figura 1
Monocórdio.

Figura 2
Intervalos de oitava a partir de um dó de 66 Hz.

com uma corda esticada - e descobriram relações entre intervalos musicais e proporções numéricas. Dividindo a corda em 12 unidades e reduzindo-a depois a 9, 8 e 6 unidades (ver Figura 1) conseguiram obter os tons que em relação ao tom inicial correspondiam aos intervalos de quarta ($9/12=3/4$), quinta ($8/12=2/3$) e oitava ($6/12=1/2$). Os intervalos de oitava, de quinta e de quarta foram assim associados às proporções 2:1, 3:2 e 4:3, respetivamente, que correspondem à razão entre os comprimentos das cordas, entre a corda inteira e a corda que se obtém reduzindo-a a $1/2$, $2/3$ ou $3/4$ do comprimento. Por exemplo, ao reduzir a corda a metade do comprimento obtinham um tom que em relação ao tom de partida formava um intervalo de uma oitava. Usando aritmética das proporções era possível construir os

intervalos musicais. O produto de duas proporções corresponde à soma de dois intervalos, por exemplo,

$$\begin{aligned} \text{quinta} + \text{quarta} &= \text{oitava}, \\ \text{que corresponde a calcular} \\ & (3/2) \times (4/3) = (2/1) \end{aligned}$$

A divisão de duas proporções corresponde à diferença de dois intervalos, por exemplo, quinta - quarta = tom inteiro, que corresponde a calcular

$$(3/2) : (4/3) = (9/8)$$

obtendo-se a fração que representa um tom inteiro.

Estas proporções estão associadas às frequências dos tons. A frequência de um tom é inversamente proporcional ao com-

primento da corda. Dividindo a corda a meio, então a sua frequência vai ter o dobro da frequência da corda inteira. Assim, por exemplo, dado um dó com frequência 66 Hz, para obter um dó uma oitava acima, multiplica-se por dois a sua frequência, obtendo-se um dó de frequência 132 Hz (ver Figura 2). A partir destas relações numéricas com a ajuda da aritmética foram estabelecidos os temperamentos musicais (sistemas de afinação) e construídas as escalas correspondentes ao longo do tempo, como o sistema bem temperado ou o sistema igualmente temperado, que é o sistema de afinação usado hoje em dia.

* Departamento de Matemática e Aplicações da Escola de Ciências da Universidade do Minho